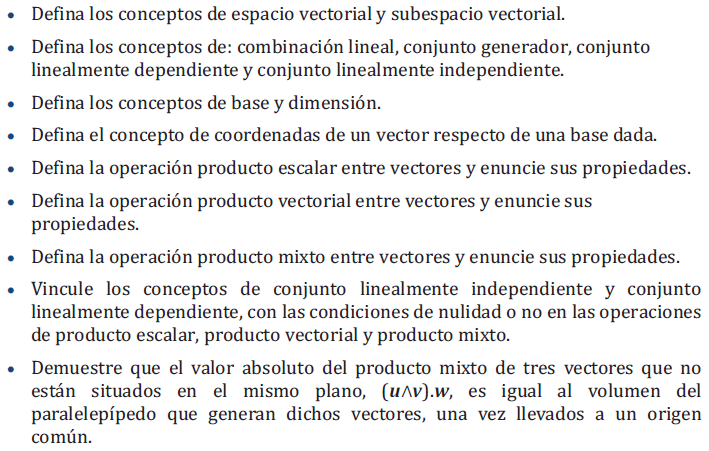
EJERCITACIÓN



Espacio vectorial real V es un conjunto cuyos elementos se denominan vectores, con dos operaciones denominadas adición y producto por un escalar cuyos operadores son: + y . , respectivamente, que cumple los siguientes 10 axiomas:

1. Si u y v ϵ V, entonces: u + v ϵ V

2. Si u y v ϵ V, entonces: u + v=v + u

3. Si u, v y w ϵ V, entonces: u + (v + w)= (u + v) + w

4. ∃0 ϵ V tal que ∀u ϵ V: u + 0=0 + u= u

5. Si u ϵ V, ∃ (-u) ϵ V tal que: u + (-u)= (-u) +u

6. Si u ϵ V y k es un escalar, entonces: k.u ϵV

7. ∀u ϵ V: 1.u=u, siendo 1 la identidad multiplicativa.

8. Si u y v ϵ V y k es un escalar, entonces: k.(u + v)=k.u + k.v

9. Si u ϵ V y k1, k2 son escalares, entonces: (k1 + k2).u=k1.u + k2.u

10. Si u ϵ V y k1, k2 son escalares, entonces: k1.(k2.u)=(k1.k2).u=k2.(k1.u)

Un subconjunto no vacío S de un espacio vectorial V es un sub-espacio de V si es un espacio vectorial en sí mismo bajo las operaciones de adición y producto por un escalar definidas en V.

Por teorema:

Sea V un espacio vectorial real, un subconjunto no vacío S de V es sub-espacio de V si y solo sí:

1) Si u y v ϵ S, entonces u + v ϵ S

2) Si u ϵ S y k es un escalar, entonces k.u ϵS

Combinación lineal:

Combinación lineal de los vectores v1, v2, v3,…,vnde un espacio vectorial real V es toda expresión de la forma:

Con k1, k2, k3,…, kn escalares.

Conjunto generador:

Un conjunto de vectores {v1, v2, v3,…,vn} de un espacio vectorial real V es conjunto generador de V si y solo si existe un conjunto de escalares {k1, k2, k3,…, kn} tal que:

∀u ϵ V:()

Conjunto linealmente dependiente:

Un conjunto de vectores {v1, v2, v3,…,vn} de un espacio vectorial real V es conjunto linealmente dependiente si y solo si existe un conjunto de escalares {k1, k2, k3,…, kn} no todos nulos tal que:

Conjunto linealmente independiente:

Un conjunto de vectores {v1, v2, v3,…,vn} de un espacio vectorial real V es conjunto linealmente independiente si y solo si:

En cada uno de los casos los vectores van en negrita pero alta paja hermano.

Base:

Un conjunto de vectores B = {v1, v2, v3,…,vn} es base del espacio vectorial V si y solo si:

1) B es conjunto linealmente independiente

2) B es conjunto generador de V

Dimensión:

Si un espacio vectorial real V tiene una base con una cantidad finita de elementos, entonces la dimensión de V denotada como dim V es la cantidad de elementos en una cualquiera de sus bases.

Coordenadas de un vector respecto a una base dada:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea B = {v1, v2, v3,…,vn} una base de V.

Si **u** ϵ V, entonces existe un único conjunto de escalares k1, k2, k3,…, kn tal que:

La sucesión de escalares: (k1, k2, k3,…, kn) es el vector de coordenadas de **u** relativo a la base B, y los escalares k1, k2, k3,…, kn son las coordenadas del vector **u** relativas a la base B.

El vector de coordenadas de **u** relativo a la base B se denota como:

(**u**)B = (k1, k2, k3,…, kn)

Definición de producto escalar de vectores y propiedades:

Sean **u** y **v** en R2 o R3 y sea θ el ángulo entre ellos, se define producto escalar entre **u** y **v**:

**u**.**v=**||**u**||.||**v**||.cos(θ), si **u**≠**0** y **v**≠**0**

**u**.**v=**0, si ¬ (**u**≠**0** y **v**≠**0**)

Propiedades del producto escalar:

Sean **u**, **v** y **w** vectores en R2 o R3 y k un escalar:

1)

2)

3)

4) si y solo si

5)si y solo si

Producto vectorial entre vectores y propiedades.

Sean **u** y **v** vectores no nulos en R3 y sea θ el ángulo entre ellos, la siguiente expresión:

, denota el producto vectorial de **u** y **v** y el resultado de la operación es un vector tal que:

1)

2) Es perpendicular al plano determinado por las direcciones de **u** y **v**.

3) Su sentido es el de avance de un tornillo de rosca derecha que gira un ángulo θ de **u** a **v.**

Propiedades del producto vectorial:

Sean **u**, **v** y **w** vectores o R3 y k un escalar:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

Producto mixto:

Producto mixto de tres vectores **u**, **v** y **w** en R3 es el producto escalar de )y **w**, en símbolos:

Propiedades del producto mixto:

1)

2)

3) Tres vectores no nulos son paralelos al mismo plano si y solo si su producto mixto es igual a cero.

4) Si un conjunto de tres vectores no nulos no coplanares se llevan a un origen común, entonces el valor absoluto de su producto mixto es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los mismos.

Vincular los conceptos de conjunto linealmente independiente y linealmente dependiente a las condiciones de nulidad o no de las operaciones: producto escalar, producto vectorial y producto mixto:

Producto escalar:

Si **u** y **v** no nulos son linealmente dependientes, entonces uno es múltiplo escalar del otro, así son colineales y por lo tanto el ánulo entre ellos es 0 o 180. Luego el resultado del producto escalar es:

O bien:

Dos vectores **u** y **v** no nulos son ortogonales si y solo si:

Producto vectorial:

Si **u** y **v** no nulos son linealmente dependientes, entonces uno es múltiplo escalar del otro, así son colineales y por lo tanto el ánulo entre ellos es 0 o 180. Luego el resultado del producto vectorial es:

O bien:

Luego, en ambos casos el resultado es el vector nulo **0**

Si **u** y **v** no nulos son linealmente independientes, entonces el resultado del producto vectorial es no nulo.

Producto mixto:

Si **u**, **v** y **w** son no nulos y linealmente dependientes, entonces existen los escalares k1, k2, k3 no todos nulos tal que:

Consideremos que dos de los escalares son nulos, sea k1= k2=0, entonces:

Dicha igualdad contradice la hipótesis de que **w** es no nulo o que el conjunto de los vectores es linealmente independiente, luego a lo sumo uno de los escalares k1, k2, k3 es nulo.

Consideremos k1=0 y el resto de los escalares no nulos, entonces:

Llamamos

Así, al evaluar el producto mixto de los vectores obtenemos por propiedades del producto mixto y producto vectorial:

Por otra parte si todos los escalares son no nulos, entonces:

Llamamos

Así, al evaluar el producto mixto de los vectores obtenemos por propiedades del producto mixto y producto vectorial:

Por lo tanto, para todo conjunto de tres vectores no nulos linealmente independientes en R3 el producto mixto es nulo. Obtenemos como conclusión que todo conjunto de tres vectores no nulos paralelos a un mismo plano son linealmente dependientes.

Si un conjunto de tres vectores no nulos es linealmente independiente, entonces el producto mixto de los mismos es nulo

Demostración de la propiedad del volumen del paralelepípedo:

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores en R3 no nulos y linealmente independientes que se llevan a un origen común.

Se sabe que el módulo del producto vectorial: puede interpretarse como el área de un paralelogramo de lados **u** y **v**. Consideramos entonces dicho paralelogramo como el área de un paralelepípedo de arista **w.**

El módulo de la proyección de la arista **w** sobre la dirección normal al plano de la base del paralelepípedo es la altura del mismo. Un vector en la dirección normal al plano de la base es **.**

Entonces, si llamamos h a la altura del paralelepípedo, A al área de la base del mismo y V al volumen del mismo:

Entonces el módulo del producto mixto de los vectores es igual al volumen del paralelepípedo que se construye sobre los mismos una vez llevados a un origen común.